Variables aléatoires à densité

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 : *Variable aléatoire réelle*

On appelle **variable aléatoire réelle** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [X \leq x] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}.$$

Exemple 1. *Il y a plusieurs exemples de variables aléatoires réelles non discrètes (que l'on dira continues) :*

- *La variable aléatoire X égale à la taille d'une personne dans une ville donnée ou dans un pays donné.*
- *La variable aléatoire X égale à la durée de fonctionnement d'une ampoule électrique exprimée en heures.*

Dans ce type de situation, la probabilité d'un événement élémentaire est nulle, car il y a une infinité de valeurs possibles :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

Cela signifie qu'il faut développer des stratégies autre que la loi pour étudier X : on va se servir de la fonction de répartition.

Définition 1.2 : *Fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction réelle F_X définie par

$$\begin{array}{rcl} F_X : \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}\left(X \leq x\right) \end{array}$$

Propriété 1.3 : *Fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition. Alors

(i) F_X est définie et croissante sur $\mathbb{R}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$,

(iii) F_X est continue à droite sur $\mathbb{R}$.

On admettra ici que la réciproque de ce résultat est également vraie : pour toute fonction vérifiant les trois points de la propriété, il existe une variable aléatoire dont c'est la fonction de répartition.

Proposition 1.4 : *Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire réelle*

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, alors

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi de probabilité} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ ont même fonction de répartition.}$$

On dira alors que la fonction de répartition <u>caractérise</u> la loi d'une variable aléatoire réelle.

1.2 Définitions

Définition 1.5 : *Variable aléatoire à densité*

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est **à densité** si sa fonction de répartition F_X est :

(i) continue sur $\mathbb{R}$,

(ii) de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Proposition 1.6 : *Caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité*

Une fonction F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X si et seulement si

(i) F est définie et croissante sur $\mathbb{R}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$,

(iii) F est continue sur $\mathbb{R}$,

(iv) F est de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple 2. *Montrer que* $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *est une fonction de répartition de variable aléatoire à densité.*

Solution.

Exemple 3. *On rappelle que pour* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$*, la fonction de répartition* F_X *n'est pas continue en* 0 *et en* 1*.* X *n'est donc pas une variable aléatoire à densité.*

On peut généraliser le résultat précédent :

$$X \text{ est une variable aléatoire discrète} \quad \Rightarrow \quad X \text{ n'est pas une variable aléatoire à densité.}$$

En effet, si X est une variable aléatoire discrète, alors F_X est une fonction en escalier donc discontinue.

1.3 Densité d'une variable aléatoire

Définition 1.7 : *Densité d'une variable aléatoire*

Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X. On appelle **densité de** X toute fonction réelle $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) \geq 0$,

(ii) $f_X(x) = F'_X(x)$ en chaque point x où F_X est de classe C^1.

On définit alors $X(\Omega)$ comme le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où f_X ne s'annule pas.

Remarque 1.8 : *Support d'une variable aléatoire à densité*

Si f_X est une densité de X, toute fonction obtenue à partir de f_X en modifiant un nombre fini de valeurs (par des valeurs positives) est également une densité de X. $X(\Omega)$ peut donc varier d'un nombre fini de points. En effet, F_X n'est pas forcément dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, d'où la nécessité de pouvoir définir autrement f_X en un nombre fini de points.

Exemple 4. *Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de répartition F est la suivante*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0, \\ \frac{x}{5}, & si\ x \in [0, 5], \\ 1, & si\ x > 5. \end{cases}$$

Montrer que cette fonction définit bien une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et calculer une densité.

Solution.

Propriété 1.9 : *Densité et fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X. Soit f_X une densité de X, alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt.$$

D'après la proposition 1.4, la fonction de répartition caractérise la loi. On peut donc définir une variable aléatoire à densité par la donnée d'une de ses densités. De plus, on peut en déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1.$$

Proposition 1.10 : *Caractérisation de la densité*

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité d'une variable aléatoire à densité si et seulement si,

(i) f est positive et continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points,

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

Démonstration. Admis. □

Propriété 1.11 : *Densité et fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X. Soit f_X une densité de X,

(i) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f_X(t)\, dt.$$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X = x) = \int_{x}^{x} f_X(t)\, dt = 0$$

On peut donc en déduire

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \int_{a}^{b} f_X(t)\, dt$$

Ces propriétés illustrent l'intérêt des variables aléatoires à densité : on obtient la valeur de la fonction de répartition F_X et donc la loi de X sous forme d'un calcul d'intégrales (éventuellement impropres). On ramène ainsi des problèmes de probabilités à des problèmes d'intégration.

Exemple 5. *On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < -1, \\ 1+x, & si\ -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & si\ 0 \leq x < 1, \\ 0, & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

1. *Montrer que f est une densité de probabilité et tracer son graphe.*
2. *Soit X une variable aléatoire de densité f. Expliciter F_X.*
3. *Calculer $\mathbb{P}\left(X > \dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathbb{P}\left(|X| \leq \dfrac{1}{3}\right)$.*

Solution.

Exemple 6. *Les cas suivants correspondent aux lois à densité usuelles.*
Il faut savoir prouver dans tous les cas que f est une densité de probabilité, ainsi que calculer l'expression de la fonction de répartition associée (dans le cas des lois uniformes et exponentielles seulement).

Loi de X	*Densité usuelle de X*	*Fonction de répartition de X*
Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ *(avec $a < b$)*	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & si\ x \in [a,b], \\ 0, & sinon. \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & si\ x \in [a,b], \\ 1, & si\ x > b. \end{cases}$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ *(avec $\lambda > 0$)*	$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & si\ x \geq 0. \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & si\ x \geq 0. \end{cases}$
Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$	$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$	*Pas d'expression simple pour la fonction de répartition Φ de X.*
Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *(avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$)*	$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$	*Pas d'expression simple pour la fonction de répartition $\Phi_{\mu,\sigma}$ de X.*

Nous reviendrons sur ces lois usuelles plus loin dans ce cours.

1.4 Transformation d'une variable aléatoire à densité

Proposition 1.12 : *Transformation affine*

Soient X une variable aléatoire admettant une densité f_X et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$, alors la variable aléatoire $Y = aX + b$ est une variable aléatoire à densité. De plus, une densité de Y est donnée par

$$f_Y : x \mapsto \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Démonstration. Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(aX + b \leq x) = \mathbb{P}(aX \leq x - b).$$

On peut alors distinguer deux cas :

(i) Si $a > 0$, alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

(ii) Si $a < 0$, alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Or la fonction $x \mapsto \frac{x-b}{a}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$. La fonction F_X étant la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, on sait que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf en un nombre fini de points. Par composition, on en déduit que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf en un nombre fini de points. On en déduit que Y est une variable aléatoire à densité.

Déterminons une densité de Y.

(i) Si $a > 0$, alors : $F_Y'(x) = \frac{1}{a} F_X'\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

(ii) Si $a < 0$, alors : $F_Y'(x) = -\frac{1}{a} F_X'\left(\frac{x-b}{a}\right) = -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

On en conclut qu'une densité de Y est donnée par : $x \mapsto \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$. □

Si X et Y sont des variables aléatoires à densité, $X + Y$ n'est pas forcément une variable aléatoire à densité.

Exemple 7. *Soit X une variable aléatoire à densité, on définit $Y = 1 - X$. D'après la proposition précédente, Y est une variable aléatoire à densité. Cependant, $X + Y = 1$ n'est pas à densité car discrète.*

Proposition 1.13 : *Transformation polynomiale (hors programme)*

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X, alors la variable aléatoire $Y = X^2$ est une variable aléatoire à densité. De plus, une densité de Y est donnée par

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right), \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Démonstration. A faire en exercice. □

Proposition 1.14 : *Transformation exponentielle (hors programme)*

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X, alors la variable aléatoire $Y = e^X$ est une variable aléatoire à densité. De plus, une densité de Y est donnée par

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{x} f_X\left(\ln(x)\right), \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Démonstration. Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y.

$$\forall x \in \mathbb{R}, [Y \leq x] = [e^X \leq x] = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } x \leq 0, \\ [X \leq \ln(x)], \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 0, \\ F_X(\ln(x)), \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

La fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et

$$\lim_{x \to 0^+} F_Y(x) = \lim_{x \to 0^+} F_X(\ln(x)) = \lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0.$$

On a bien $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0$. On en déduit que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que Y est une variable aléatoire à densité.

Déterminons une densité de Y.

$$\forall x > 0, \quad F_Y'(x) = \frac{1}{x} F_X'(\ln(x)) = \frac{1}{x} f_X(\ln(x)).$$

On en conclut qu'une densité de Y est donnée par :

$$x \mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{x} f_X\left(\ln(x)\right), \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

□

Si X est une variable aléatoire à densité et φ une fonction continue quelconque $\varphi(X)$ n'est pas forcément une variable aléatoire à densité, ni même une variable aléatoire discrète.

Exemple 8. *On considère une variable aléatoire à densité X et on définit $Y = X + |X|$. On a alors*

- *Si $x < 0$, alors $\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X + |X| \leq x) = 0$ car $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.*
- *Si $x = 0$, alors $\mathbb{P}(Y \leq 0) = \mathbb{P}(X \leq -|X|) = \mathbb{P}(X \leq 0) = F_X(0)$.*
- *Si $x > 0$, alors $\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(|X| \leq x - X) = \mathbb{P}(X - x \leq X \leq x - X) = \mathbb{P}(2X \leq x) = F_X\left(\dfrac{x}{2}\right)$.*

Ainsi

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ F_X(0), & \text{si } x = 0, \\ F_X\left(\frac{x}{2}\right), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire à densité telle que $F_X(0) > 0$ et F_X strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors F_Y n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (discontinue en 0) et n'est pas une fonction en escalier (continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$). Y n'est donc ni une variable aléatoire à densité, ni une variable aléatoire discrète.

1.5 Moments d'une variable aléatoire à densité

1.5.1 Espérance

Définition 1.15 : *Espérance d'une variable aléatoire à densité*

Soit X une variable aléatoire de densité f_X. On dit que

$$X \text{ admet une espérance} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\, dt \text{ converge absolument.}$$

Dans ce cas, **l'espérance de** X est définie par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\, dt.$$

Exemple 9. *On reprend la fonction f, densité de la variable aléatoire X, définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < -1, \\ 1 + x, & si\ -1 \leq x < 0, \\ 1 - x, & si\ 0 \leq x < 1, \\ 0, & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que X admet une espérance.

Solution.

Exemple 10 (Loi de Cauchy)**.** *On considère la fonction f, densité de la variable aléatoire X, définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}.$$

Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Solution.

Théorème 1.16 : *Théorème de transfert*

Soient X une variable aléatoire de densité f_X nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue sauf en un nombre fini de points, alors

$$g(X) \text{ admet une espérance} \quad \Leftrightarrow \int_a^b g(t) f_X(t) dt \text{ converge absolument.}$$

Dans ce cas, l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E(g(X)) = \int_a^b g(t) f_X(t) dt.$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 11. *Soit X une variable aléatoire de densité f_X définie par :*

$$f_X(t) = \begin{cases} e^{-t}, & si\ t \geq 0, \\ 0, & si\ t < 0. \end{cases}$$

La variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1 + e^{-X}}$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Solution.

Propriété 1.17 : *Espérance*

Soient X une variable aléatoire à densité admettant une espérance et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $Y = aX + b$ admet une espérance et

$$E(aX + b) = a\,E(X) + b.$$

Démonstration. À faire en exercice à l'aide du théorème de transfert. □

Définition 1.18 : *Variable aléatoire centrée*

On dit que X est une **variable aléatoire centrée** si $E(X) = 0$.

Propriété 1.19 : *Variable aléatoire centrée associée*

Si X une variable aléatoire à densité admettant une espérance, la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée et est appelée **variable aléatoire centrée associée à** X.

1.5.2 Variance

Définition 1.20 : *Moments d'ordre r*

Soient X une variable aléatoire de densité f_X et $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un **moment d'ordre** r lorsque X^r admet une espérance. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X

$$m_r(X) = E(X^r).$$

Exemple 12. *Soit X une variable aléatoire de densité f_X définie par :*

$$f_X(t) = \begin{cases} e^{-t}, & si\ t \geq 0, \\ 0, & si\ t < 0. \end{cases}$$

Calculer les moments d'ordre 1 et 2 de X.

Solution.

Proposition 1.21 : *Existence de moments d'ordre inférieur*

Soit X une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre r, alors

— X admet des moments à tout ordre inférieur ou égal à r.

— X admet un moment centré d'ordre r.

Définition 1.22 : *Variance, écart-type*

Soit X une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre 2. On appelle **variance** de X

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right),$$

et **écart-type** de X

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)},$$

La variance d'une variable aléatoire est son moment centré d'ordre 2, elle mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Propriété 1.23 : *Variance*

Soit X une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre 2. Alors, on a :

(i) (Positivité) $V(X) \geq 0$.

(ii) (Variance nulle) $V(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X$ est presque sûrement égale à $E(X)$.

(iii) (Transformation affine) Si $a, b \in \mathbb{R}$ alors $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Théorème 1.24 : *Formule de Koenig-Huygens*

Soient X une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre 2.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple 13. *On reprend la variable aléatoire X de densité f_X définie dans l'exemple précédent. Calculer la variance de X.*

Solution.

Exemple 14. *On considère la fonction f_X, densité de la variable aléatoire X (à vérifier en exercice), définie par :*

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3}, & si\ t \geq 1, \\ 0, & si\ t < 1. \end{cases}$$

Montrer que X possède une espérance mais pas de variance.

Solution.

Définition 1.25 : *Variable aléatoire réduite*

On dit que X est une **variable aléatoire réduite** si $V(X) = 1$.

Propriété 1.26 : *Variable aléatoire centrée réduite associée*

Soit X une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre 2. Si $V(X) \neq 0$, alors on note

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

La variable aléatoire X^* est appelée la **variable aléatoire centrée réduite associée à** X.

Exemple 15. *On reprend la variable aléatoire X de densité f_X définie par :*

$$f_X(t) = \begin{cases} e^{-t}, & si\ t \geq 0, \\ 0, & si\ t < 0. \end{cases}$$

La variable aléatoire centrée réduite associée à X est

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X - 1}{\sqrt{1}} = X - 1.$$

X^* est donc d'espérance nulle et d'écart-type égal à 1.

2 Lois à densité usuelles

2.1 Loi uniforme

2.1.1 Loi uniforme sur $[a, b]$

Définition 2.1 : *Loi uniforme*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur** $[a, b]$ si X a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a, b], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

D'après la remarque 1.8, l'intervalle sur lequel X ne s'annule pas peut être choisi égal à l'intervalle $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Proposition 2.2 : *Fonction de répartition*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, alors sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{si } x \in [a, b], \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Démonstration. Comme $X(\Omega) = [a, b]$, alors si $x < a$ on a $F(x) = 0$ et si $x > b$ on a $F(x) = 1$. Soit $x \in [a, b]$, alors

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{x-a}{b-a}.$$

□

Proposition 2.3 : *Espérance et variance*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Démonstration. À faire en exercice. □

Méthode 2.4 : *Situation caractéristique*

On choisit un réel au hasard dans le segment $[a, b]$, et on note X le réel obtenu. X suit une loi uniforme sur $[a, b]$.

Exemple 16. *Dans la journée, le tram E passe toutes les 6 minutes devant le lycée Kléber en direction de la Robertsau. On note X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0, 6]$. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?*

Solution.

Exemple 17. *Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n+1[)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \lfloor X \rfloor$.*

Solution.

2.1.2 Loi uniforme sur $[0, 1]$

En particulier, on utilise souvent la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Définition 2.5 : *Loi uniforme*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors sa densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.6 : *Fonction de répartition*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Proposition 2.7 : *Espérance et variance*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{12}.$$

2.1.3 Transformation de variables aléatoires uniformes

Propriété 2.8 : *Transformation affine de variables aléatoires uniformes*

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \quad \Longleftrightarrow \quad (b - a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b]).$$

Démonstration. D'après la propriété 1.12 sur la transformation affine d'une variable aléatoire à densité, $Y = \alpha X + \beta$ avec $\alpha \neq 0$ est une variable aléatoire à densité avec pour densité

$$f_Y(x) = \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right).$$

Or $\dfrac{x - \beta}{\alpha} \in [0, 1] \Longleftrightarrow x \in [\beta, \alpha + \beta]$, ainsi

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}, & \text{si } x \in [\beta, \alpha + \beta], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En posant $\alpha = b - a$ (avec $a \neq b$) et $\beta = a$, on obtient bien

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a}, & \text{si } x \in [a, b], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

2.2 Loi exponentielle

2.2.1 Loi exponentielle de paramètre λ

Définition 2.9 : *Loi exponentielle*

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle de paramètre** λ si X a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0, \\ \lambda\, e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

D'après la remarque 1.8, l'intervalle sur lequel X ne s'annule pas peut être choisi égal à $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 2.10 : *Fonction de répartition*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

Démonstration. Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, alors si $x < 0$ on a $F(x) = 0$. Soit $x \geq 0$, alors

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

□

Proposition 2.11 : *Espérance et variance*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Démonstration. À faire en exercice. □

2.2.2 Caractérisation par l'absence de mémoire

Définition 2.12 : *Variable aléatoire sans mémoire*

On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs positives, est **"sans mémoire"** si, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$, on a :

$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\, \mathbb{P}(X > s).$$

Théorème 2.13 : *Caractérisation de la loi exponentielle*

Les variables aléatoires suivant une loi exponentielle sont les seules variables aléatoires positives sans mémoire (à l'exception de la variable quasi-certaine égale à 0).

Démonstration. Admis. □

Si $\mathbb{P}(X > t) \neq 0$, la propriété d'absence de mémoire s'écrit :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \mathbb{P}_{[X>t]}(X > t+s) = \mathbb{P}(X > s).$$

Les variables aléatoires suivant la loi géométrique vérifient également cette propriété, mais seulement pour s et t des entiers naturels.

Méthode 2.14 : *Situation caractéristique*

La loi exponentielle est aussi appelée loi de durée de vie sans vieillissement. La probabilité que le phénomène dure au moins $t+s$ heures sachant qu'il a déjà duré t heures sera la même que la probabilité de durer s heures à partir de sa mise en fonction initiale. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t.

Exemple 18. *Chaque atome radioactif possède une durée de vie qui suit une loi exponentielle. Le paramètre λ s'appelle alors la constante de désintégration.*

2.2.3 Transformation de variables aléatoires exponentielles

Propriété 2.15 : *Transformation affine de variables aléatoires exponentielles*

Pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

Démonstration. D'après la propriété 1.12 sur la transformation affine d'une variable aléatoire à densité, $Y = \dfrac{1}{\lambda} X$ est une variable aléatoire à densité avec pour densité

$$f_Y(x) = \lambda\, f_X(\lambda x).$$

Or $\lambda x \in \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}_+$, ainsi

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0, \\ \lambda\, e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

□

Attention si X suit une loi exponentielle, les variables aléatoires $X + b$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $a\,X$ avec $a < 0$ ne suivent pas des lois exponentielles.

Exemple 19 (Méthode d'inversion)**.** *Soient $\lambda > 0$ et $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, montrons que $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.*

Soit X une variable aléatoire, comme sa fonction de répartition F_X prend ses valeurs dans $[0,1]$, alors d'après la proposition 2.6 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = F_U(F_X(x)) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) \qquad (*)$$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, montrons que X et $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ ont la même fonction de répartition.

— *Pour $x < 0$, on a également $F_X(x) = 0 = \mathbb{P}\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right)$.*

— *Pour $x \geq 0$, d'après l'égalité $(*)$ on a*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) \\ &= \mathbb{P}(1 - U \geq e^{-\lambda x}) \\ &= \mathbb{P}(\ln(1-U) \geq -\lambda x) \quad \textit{car } t \mapsto \ln(t) \textit{ est strictement croissante} \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right) \end{aligned}$$

La fonction de répartition caractérisant la loi, ceci prouve que X et $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suivent la même loi.

2.3 Loi normale

2.3.1 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Définition 2.16 : *Loi normale centrée réduite*

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi normale centrée réduite** si X a pour densité la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

On verra dans le chapitre Convergences et approximations que la loi normale centrée réduite est la loi limite (après réduction) de la somme dans une suite infinie d'épreuve répétées. Elle est donc souvent utilisée en pratique pour approximer la somme de phénomènes aléatoires petits, nombreux et indépendants.

Proposition 2.17 : *Fonction de répartition*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors sa fonction de répartition Φ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On ne sait pas expliciter Φ à l'aide de fonctions usuelles, mais il existe des tables de valeurs pour cette fonction.

Propriété 2.18 : *Parité de la densité de la loi normale*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

En particulier, $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration. On utilise le changement de variable affine $u = -t$, (qui joue sur la parité de la densité φ)

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)dt = \int_{+\infty}^{x} \varphi(-u)(-du) = \int_{x}^{+\infty} \varphi(u)du = 1 - \Phi(x).$$

□

En particulier, en utilisant la propriété 1.11, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\mathbb{P}(|X| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Proposition 2.19 : *Espérance et variance*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = 0 \quad \text{et} \quad V(X) = 1.$$

Démonstration. (i) Montrons que $E(X) = 0$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t\varphi(t)|dt$ est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$. La parité de la densité permet de se contenter de vérifier la convergence en $+\infty$, comme

$$\frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

D'après le critère de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, donc d'après le critère de comparaison par négligeabilité $\int_{-\infty}^{+\infty} |t\varphi(t)|dt$ converge. Donc X admet une espérance et comme φ est paire, alors $E(X) = 0$.

(ii) Montrons que $V(X) = 1$. Par intégration par parties sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b t^2\varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_a^b + \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) = \left[-t\varphi(t)\right]_a^b + \int_a^b \varphi(t)dt$$

En faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$, on obtient bien $E(X^2) = 1$. D'après la formule de Koenig-Huygens, on a bien $V(X) = 1$.

□

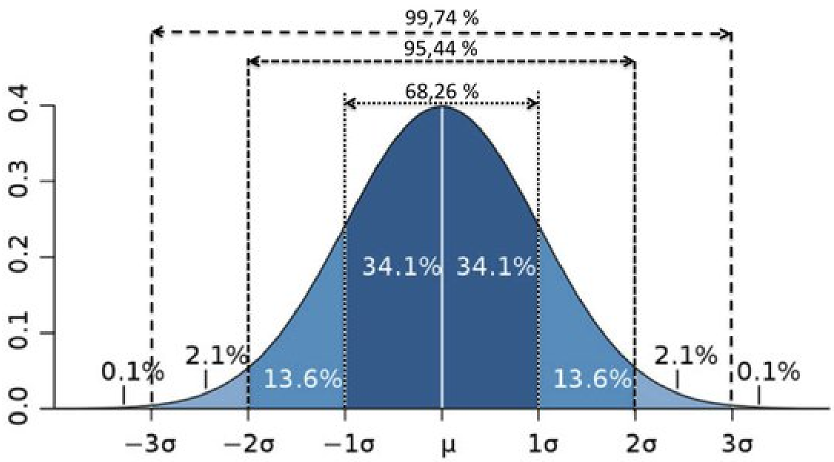
2.3.2 Loi normale (ou de Laplace-Gauss) $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition 2.20 : *Loi normale*

Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi normale de paramètres μ et σ** si X a pour densité la fonction $\varphi_{\mu,\sigma}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.



Proposition 2.21 : *Fonction de répartition*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, alors sa fonction de répartition $\Phi_{\mu,\sigma}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

2.3.3 Transformation de variables aléatoires normales

Propriété 2.22 : *Transformation affine de variables aléatoires normales (hors programme)*

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $a \neq 0$), on a :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \iff aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a\mu + b, (a\sigma)^2\right).$$

Démonstration. D'après la propriété 1.12 sur la transformation affine d'une variable aléatoire à densité, $Y = aX + b$ est une variable aléatoire à densité avec pour densité

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{x-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(|a|\sigma)\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-(a\mu+b))^2}{2(a\sigma)^2}}$$

Ainsi $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a\mu + b, (a\sigma)^2\right)$.

□

Corollaire 2.23 : *Transformation vers la loi normale centrée réduite*

En particulier,

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \iff X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Démonstration. On utilise la propriété précédente avec $a = \frac{1}{\sigma}$ et $b = -\frac{\mu}{\sigma}$. □

On peut donc toujours se ramener à la loi normale centrée réduite. Pour cette raison, il n'est pas nécessaire de construire d'autres tables de valeurs que celle de Φ. On pourra toujours lire les valeurs numériques utiles dans la table de valeurs de Φ.

Exemple 20. *Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 2^2)$. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 7)$.*

Solution.

Proposition 2.24 : *Espérance et variance*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, alors X possède une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Démonstration. Si $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, alors d'après le corollaire 2.23

$$X = \sigma Y + \mu \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right).$$

D'après la propriété 1.17, alors

$$E(X) = \sigma E(Y) + \mu = \mu.$$

D'après la propriété 1.23, alors

$$V(X) = \sigma^2 V(Y) = \sigma^2.$$

□

Annexe : Table de la loi normale centrée réduite

La table de loi suivante donne les valeurs de la fonction Φ sur $[0, 3]$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Exemple 21. *Pour lire la valeur de $x = 1,24$ (intersection de la ligne 1.2 et de la colonne 0.04), on a*

$$\Phi(1,24) \approx 0,8925.$$